=CEVAP ANAHTARI=

MAT 203 ANALİTİK GEOMETRİ I DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

Adı-Soyadı: **06.02.2022**
Numarası:

1. $P(3,2,5)$, $Q(2,-2,-2)$ ve $R(4,1,7)$ noktaları veriliyor. $\overset{\Delta}{PQR}$ üçgeninin alanını bulunuz.

2. $(1,2,-4)$ noktasından geçen ve

$$d_1 \dots \frac{x-8}{3} = \frac{-19+y}{16} = \frac{z-10}{7} = t, \quad d_2 \dots \frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{5-z}{5} = \lambda$$

doğrularına dik olan d doğrusunu bulunuz.

3. $d_1 \dots \dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-2}{2} = z-3 = t$, $d_2 \dots 1-x = -y = z-2 = \lambda$

doğrularının birbirine göre durumlarını inceleyiniz. Eğer bir düzlem belirtiyorsa bu düzlemin denklemini bulunuz.

4. $d \dots \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = -1+4t \end{cases}$ doğrusu ile $P \dots x+2y-2z-5=0$ düzleminin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

5. $d \dots \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ doğrusu ile $P \dots x+\sqrt{3}y-2=0$ düzlemi arasındaki açıyı bulunuz.

6. $\begin{array}{l} P \dots 2x+y+2z-2=0 \\ Q \dots y+z-1=0 \\ R \dots 2x+z-a=0 \end{array}$

düzlemlerinin bir doğru boyunca kesişmesi için a sayısı ne olmalıdır?

7. $A(2,-5,-1)$ noktasının sırasıyla $x-$eksenine, $y-$eksenine ve xoy düzlemine göre simetriği olan noktaları bulunuz.

Prof. Dr. Emin KASAP

① $\overset{\triangle}{PQR}$ üçgenin alanı S olsun. O halde

$$S = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\|}{2}$$ olur.

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1,-4,-7)$, $\overrightarrow{PR} = R - P = (1,-1,2)$ olup

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & -4 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = e_1[-8-7] - e_2[-2+7] + e_3[1+4] = (-15,-5,5).$$

olur. Buradan

$$S = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\|}{2} = \frac{\|(-15,-5,5)\|}{2} = \frac{5\|(-3,-1,1)\|}{2} = \frac{5\sqrt{11}}{2}$$

bulunur.

② d_1 ve d_2 doğrularının doğrultmanları sırasıyla $\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}$ olsun.
d nin doğrultmanına $\vec{u}_d$ diyelim. Eğer $d \perp d_1$, $d \perp d_2$ $\Rightarrow$
$\vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1}$ ve $\vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_2}$ olur. O halde $\vec{u}_d = \vec{u}_{d_1} \wedge \vec{u}_{d_2}$ alınabilir.

$$\vec{u}_{d_1} \wedge \vec{u}_{d_2} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 16 & 7 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix} = e_1[-80-56] - e_2[-15-21] + e_3[24-48] = (-136,36,-24)$$

olup $\vec{u}_{d_1} \wedge \vec{u}_{d_2} = (-136,36,-24) = 4(-34,9,-6)$ olduğundan $\vec{u}_d = (-34,9,-6)$ alınabilir.

d doğrusu $(1,2,-4)$ noktasından geçtiğinden d nin denklemi

$$d \ldots \frac{x-1}{-34} = \frac{y-2}{9} = \frac{z+4}{-6} = k$$

bulunur.

③ d_1 ve d_2 nin doğrultmanları sırasıyla $\vec{u}_{d_1} = (5,2,1)$ ve $\vec{u}_{d_2} = (-1,-1,1)$
olur d_1 de $t=0$ için $A(6,2,3) \in d_1$ ve d_2 de $\lambda = 0$ için $B(1,0,2) \in d_2$
dır. Buradan $\overrightarrow{AB} = B - A = (-5,-2,-1)$ bulunur. Buradan

$$\det(\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ ($\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}_{d_1}$ in -1 katı olduğundan) olur.

3. cevabın devamı) olduğundan d_1 ile d_2 bir noktada kesişirler.

Kesişen iki d_1 ve d_2 doğrusunun belirttiği P düzleminin normali $\vec{n}_P$ olmak üzere $\vec{n}_P = \vec{u}_{d_1} \wedge \vec{u}_{d_2}$ alınabilir.

$$\vec{n}_P = \vec{u}_{d_1} \wedge \vec{u}_{d_2} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = e_1[2+1] - e_2[5+1] + e_3[-5+2] = (3,-6,-3)$$

olur. P nin denklemi

$$P \ldots 3x-6y-3z+d=0$$

olur. $B(1,0,2) \in P$ olduğundan $3-6+d=0 \Rightarrow d=3$ olup

$$P \ldots 3x-6y-3z+3=0 \quad \text{veya} \quad P \ldots x-2y-z+1=0$$

bulunur.

4) d nin doğrultmanı $\vec{u}_d = (2,3,4)$ ve P nin normali $\vec{n}_P = (1,2,-2)$ dir.

$$\langle \vec{u}_d, \vec{n}_P \rangle = \langle (2,3,4),(1,2,-2) \rangle = 2+6-8=0$$

olduğundan $d \subset P$ veya $d \parallel P$ dir. $t=0$ için $A(1,-2,-1) \in d$ olur. $A \in P$ midir? $1-4+2-5=-6 \neq 0$ olduğundan $d \parallel P$ dir. Yani doğru ile düzlem paraleldir.

5) d nin doğrultmanı $\vec{u}_d = (1,0,0)$, P nin normali $\vec{n}_P = (1,\sqrt{3},0)$ dır.

doğru ile düzlem arasındaki açı α olmak üzere

$$\langle \vec{u}_d, \vec{n}_P \rangle = \|\vec{u}_d\| . \|\vec{n}_P\| . \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$= \|\vec{u}_d\| . \|\vec{n}_P\| . \sin\alpha$$

biçimindedir. Buradan

$$\langle (1,0,0),(1,\sqrt{3},0) \rangle = \|(1,0,0)\| . \|(1,\sqrt{3},0)\| . \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 1.2.\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

elde edilir.

(6) P, Q ve R düzlemlerinin normalleri sırasıyla

$\vec{n}_P = (2,1,2)$, $\vec{n}_Q = (0,1,1)$ ve $\vec{n}_R = (2,0,1)$ dir. Öncelikle

$\det(\vec{n}_P, \vec{n}_Q, \vec{n}_R) = 0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 1(-2) + 2(-2) = 0 \quad \text{olur.}$$

P ve Q nun denklemlerinde $y=0$ alınırsa $z=1$, $x=0$ olup

$A(0,0,1) \in P \cap Q$ olur. Bu üç düzlemin bir doğru boyunca kesişmesi için

$A \in R$ olması gerekir. Buradan

$$0+1=a \Rightarrow a=1$$

elde edilir.

(7)

$A(2,-5,-1)$ noktasının x-eksenine göre simetriği $B(2,5,1)$ olur.

$A(2,-5,-1)$ noktasının y-eksenine göre simetriği $C(-2,-5,1)$ olur.

$A(2,-5,-1)$ noktasının $z=0$ düzlemine göre simetriği $D(2,-5,1)$ olur.